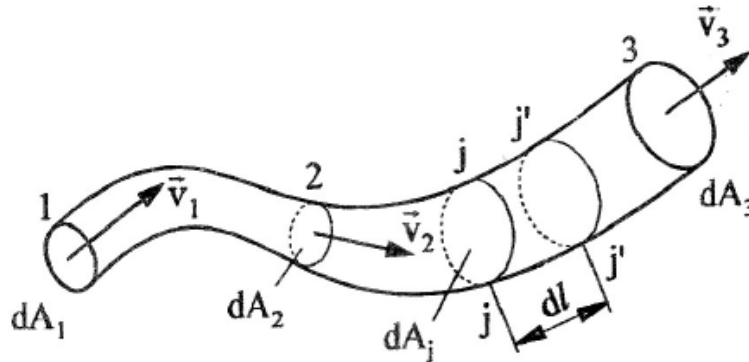


## 2. Dinamika fluida

### 2.1 Jednačina kontinuiteta

**Protok fluida** kroz neki presek predstavlja količinu fluida koja protekne u jedinici vremena kroz posmatrani presek.



Slika 1. Protok kroz strujno vlakno

Posmatra se strujno vlakno sa elementarnim poprečnim presekom  $dA$  na mestu  $j-j$ . Fluid koje se u uočenom trenutku našao u ovom preseku će u sledećem trenutku, po isteku beskonačno malog vremena  $dt$  doći u presek  $j'-j'$  i pri tome preći put  $dl$ . Za vreme  $dt$  je iz preseka  $j-j$  isteklo onoliko fluida kolika je zapremina strujnog vlakna između preseka  $j-j$  i  $j'-j'$ :

$$dV = dA \cdot dl \quad (2.1)$$

U jedinici vremena će iz preseka  $dA$  isteći sledća količina fluida:

$$dQ = \frac{dV}{dt} \quad (2.2)$$

Kako je brzina strujanja delića kroz poprečni presek  $dA$  strujnog vlakna jednaka:

$$v = \frac{dl}{dt} \quad (2.3)$$

elementarni zapreminski protok je:

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.4)$$

Kroz poprečni presek  $A$  strujne cevi zapreminski protok će biti:

$$Q = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.5)$$

Poprečni presek  $A$  je konačna veličina u kojoj se menjaju brzine. Za praktične proračune uvodi se srednja brzina strujanja fluida  $v_{sr}$  koja kad se pomnoži sa površinom poprečnog preseka  $A$  dobija se zapreminski protok fluida:

$$Q = v_{sr} \cdot A \quad (2.6)$$

Da bi se odredilo koliko mase protiče u jedinici vremena kroz pomenute poprečne preseke vlakna  $dA$  i cevi  $A$ , uzima se u obzir da je elementarna masa  $dm$  elementarne zapremine  $dV$  jednaka:

$$dm = \rho \cdot dV \quad (2.7)$$

Elementarni maseni protok:

$$d\dot{m} = \rho \cdot dQ \quad (2.8)$$

Uvrštavajući izraz za elementarni zapreminski protok, elementarni maseni protok postaje:

$$d\dot{m} = \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

Integraljenjem prethodnog izraza dolazi se do masenog protoka kroz strujnu cev:

$$\dot{m} = \int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} = \rho \cdot v_{sr} \cdot A \quad (2.10)$$

Masa koja u jedinici vremena protekne kroz poprečni presek vlakna na mestu  $j$ - $j$  jednaka je masi koja protekne kroz poprečni presek vlakna  $j$ '- $j$ :

$$d\dot{m} = \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} = const. \quad (2.11)$$

tj. analogno za strujnu cev:

$$\dot{m} = \int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} = const. \quad (2.12)$$

Prethodne dve jednačine predstavljaju **jednačine kontinuiteta** za stišljiv fluid ( $\rho = const.$ ).

Kada je fluid nestišljiv ( $\rho = const.$ ), **jednačine kontinuiteta** za strujno vlakno i strujnu cev se mogu napisati kao:

$$dQ = const. \quad (2.13)$$

$$Q = const. \quad (2.14)$$

## 2.2 Bernulijeva jednačina

Bernulijeva jednačina predstavlja bilans pojedinih karakterističnih vrsta fluidne energije. Opšti oblik Bernulijeve jednačine bez gubitaka glasi:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const. \quad (2.15)$$

gde su:

$\frac{v^2}{2}$  - kinetička energija,

$\frac{p}{\rho}$  - pritisna energija i

$gz$  - položajna energija.

Članovi Bernulijeve jednačine predstavljaju energiju koju u sebi sadrži jedinična masa fluidne struje. Konstanta na desnoj strani jednakosti označava da je zbir navedene tri vrste energije konstanta za bilo koju tačku strujnice.

Drugi veoma često upotrebljavan oblik Bernulijeve jednačine je:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = const. \quad (2.16)$$

gde su:

$\frac{v^2}{2g}$  - brzinska visina,

$\frac{p}{\rho g}$  - pritisna (pijezometarska) visina i

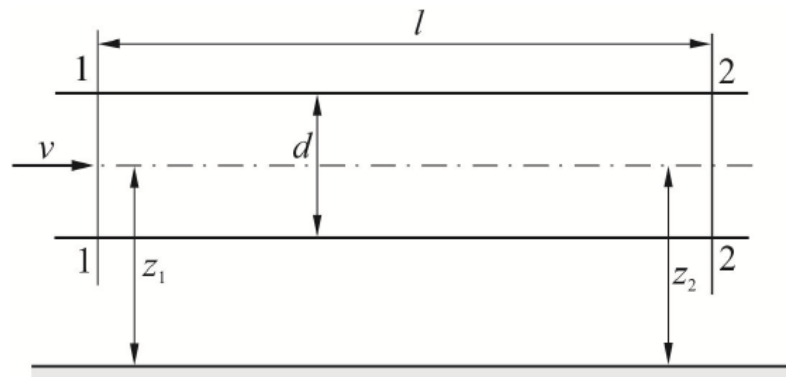
$z$  – geodezijska visina.

Članovi Bernulijeve jednačine u ovom obliku dati su u metrima stuba tečnosti koja struji kroz posmatrane preseke.

Snaga fluidne struje dobija se množenjem svakog člana Bernulijeve jednačine sa masenim protokom fluida  $\rho Q$ :

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v^2 + pQ + z g \rho Q \quad (2.17)$$

Posmatra se cev konstantnog prečnika  $d$  i u njoj dva preseka 1 i 2 koji su međusobno udaljeni za dužinu  $l$ , slika 2.2.



Slika 2.2 Određivanje gubitaka energije

Deo strujne energije u preseku 1 se troši na savlađivanje gubitaka koji se javljaju na putu do preseka 2. Zbog toga će strujna energija u preseku 2 biti manja od energije u preseku 1, za vrednost gubitaka. Bernulijeva jednačina napisana za ova dva preseka glasi:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + Y_g \quad (2.18)$$

gde se izgubljena strujna energija  $Y_g$  unosi sa desne strane Bernulijeve jednačine. Ne postoji teorijska metoda kojom bi se mogli izračunati gubici specifične strujne energije, već se gubici određuju eksperimentalnim putem.

Svi gubici se mogu razvrstati u dve grupe: gubici usled trenja i gubici usled lokalnih otpora.

Za određivanje gubitaka koji nastaju usled trenja koristi se Darsijev obrazac:

$$Y_{gr} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (2.19)$$

gde su:

$v$  – brzina strujanja [m/s],

$L$  – dužina deonice cevovoda [m],

$D$  – unutrašnji prečnik cevi [m] i  
 $\lambda$  – koeficijent trenja [-].

Lokalni gubici određuju se iz Vasbahovog izraza:

$$Y_{glok} = \zeta \frac{v^2}{2} \quad (2.20)$$

gde je:

$\zeta$  – koeficijent lokalnog otpora [-].

Lokalni gubici nastaju na mestima gde se javlja promena vektora brzine. Karakteristična mesta gde se javljaju ovi gubici su: kolena, ventili, blende, nagla proširenja i suženja, usisne korpe, račve itd.

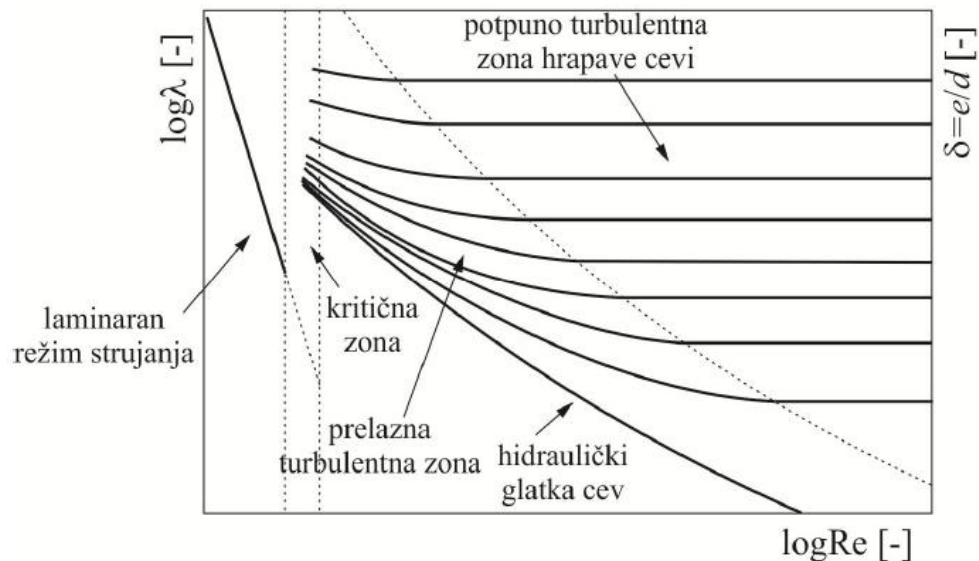
Ukupni gubici strujne energije zbir su svih gubitaka koji nastaju usled trenja i svih gubitaka koji nastaju usled lokalnih otpora:

$$Y_g = \sum Y_{gtr} + \sum Y_{glok} \quad (2.21)$$

Problem određivanja gubitaka specifične strujne energije svodi se na određivanje koeficijenta trenja  $\lambda$  i koeficijenta lokalnog otpora  $\zeta$ .

### 2.2.1 Koeficijent otpora trenja

Koeficijent trenja  $\lambda$  generalno zavisi od relativne hrapavosti  $e/D$  i Rejnoldsovog broja  $Re$ . Na slici 2.3 je prikazan Mudijev dijagram koji se koristi za određivanje koeficijenta trenja.



Slika 2.3 Zavisnost koeficijenta trenja od relativne hrapavosti i Rejnoldsovog broja (Mudijev dijagram)

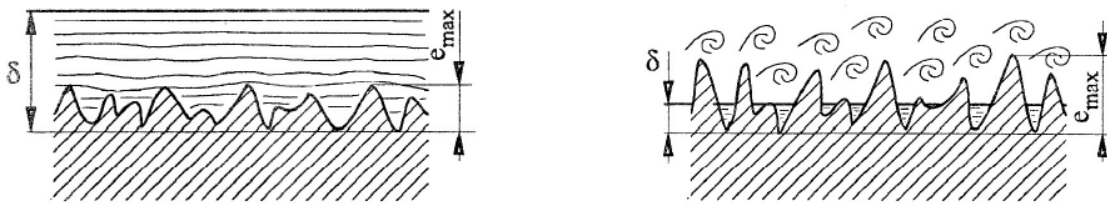
Kod laminarnog režima strujanja ( $Re < 2300$ ) koeficijent otpora trenja zavisi samo od Rejnoldsovog broja:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.22)$$

U prelazno turbulentnoj zoni je prelaz između laminarnog i čisto turbulentnog strujanja. Koeficijent trenja u ovoj oblasti zavisi i od Rejnoldsovog broja i od relativne hrapavosti, tj.  $\lambda = f(Re, e/D)$ .

Kod hidraulički glatke cevi debljina laminarnog sloja veća je od apsolutne hrapavosti, *slika 2.4*. Za ovaj slučaj koeficijent trenja određuje se iz Blazijusovog izraza:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (2.23)$$



*Slika 2.4 Hidraulički glatke cevi (levo) i hrapave cevi (desno)*

U zoni čisto turbulentnog strujanja koeficijent trenja zavisi samo od relativne hrapavosti  $\lambda = f(e/D)$ . Pri jednoj vrednosti relativne hrapavosti promenom vrednosti Rejnoldsovog broja ne menja se vrednost koeficijenta trenja.

## 2.2.2 Lokalni koeficijent otpora

Ponekad se umesto koeficijenta lokalnog otpora  $\zeta$  daje ekvivalentna dužina cevovoda  $l_{ekv}$ . Izjednačavanjem gubitaka energije usled trenja i lokalnog gubitka energije:

$$\zeta \frac{v^2}{2} = \lambda \frac{l_{ekv}}{D} \frac{v^2}{2} \quad (2.24)$$

dobija se veza između koeficijenta lokalnog otpora i njemu ekvivalentne dužine cevovoda:

$$l_{ekv} = \zeta \frac{D}{\lambda} \quad (2.25)$$

Iz prethodnog izraza može se videti da je ekvivalentna dužina cevovoda ustvari zamišljena dužina cevovoda duž koje će nastati vrednost gubitaka energije kao u uočenom uzročniku lokalnog otpora.

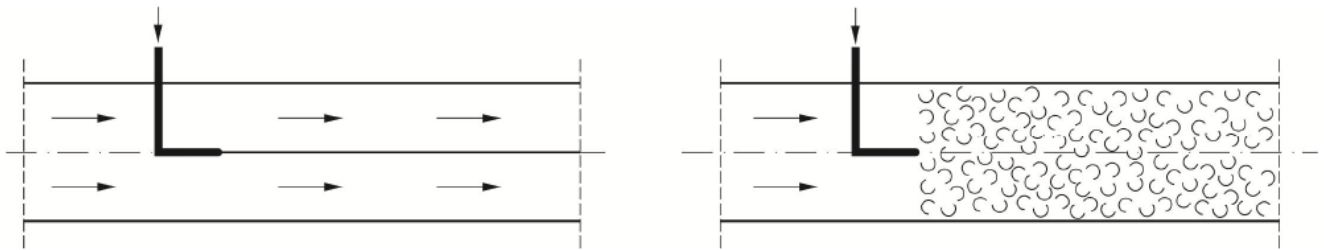
### 2.2.3 Režim strujanja fluida

Engleski fizičar Osborn Reynolds (Osborne Reynolds) je krajem XIX veka eksperimentalnim putem utvrdio da postoje dva režima strujanja fluida: laminaran i turbulentan režim strujanja.

Kroz staklenu, providnu cev uspostavio je strujanje fluida. Na ulazu u staklenu cev postavio je kapilarnu cev kroz koju je strujao obojeni fluid.

Pri manjim brzinama strujanja obojena strujnica koja ističe iz kapilarne cevčice se vidi kao jedna nit, *slika 2.5 levo*. Uspostavljen je laminaran režim strujanja kod koga se fluid kreće po slojevima, strujnice su paralelne i fluidni delići se međusobno ne mešaju.

Pri većim brzinama strujanja fluida u staklenoj cevi fluid se oboji, *slika 5.2 desno*. Uspostavljen je turbulentan režim strujanja gde se fluid više ne kreće po slojevima, strujnice više nisu paralelne, a fluidni delići se međusobno mešaju.



Slika 2.5 Reynoldsov eksperiment

Koji će se režim strujanja javiti zavisi od vrednosti bezdimenzijske veličine koja se naziva **Reynoldsov broj**. Reynoldsov broj predstavlja odnos sila inercije  $F_{in}$  i sile unutrašnjeg trenja  $F_{tr}$ .

$$Re = \frac{F_{in}}{F_{tr}} = \frac{\rho V \frac{dv}{dt}}{\mu A \frac{dv}{dh}} = \frac{\frac{dh}{dt} V}{\nu A} = \frac{vl}{\nu} \quad (2.26)$$

gde su:

$v$  – brzina strujanja fluida [m/s],

$\nu$  – kinematska viskoznost fluida [m<sup>2</sup>/s] i

$l$  – karakteristična linijska veličina [m].

Za cevi kružnog poprečnog preseka karakteristična linijska veličina  $l$  je unutrašnji prečnik  $d$ , pa Reynoldsov broj postaje:

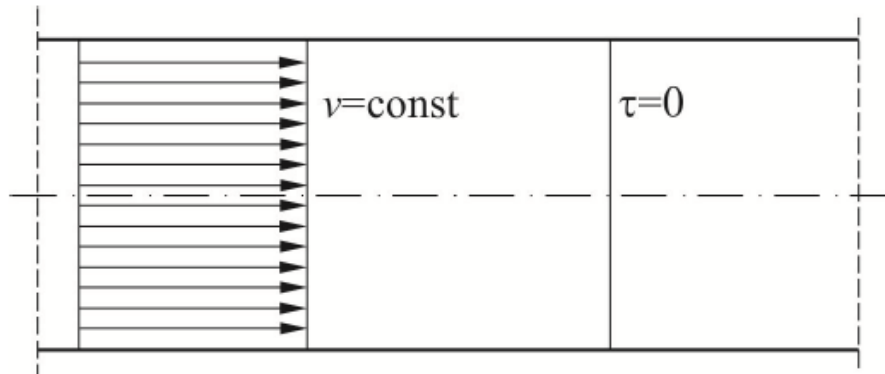
$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (2.27)$$

Kada je vrednost Reynoldsovog broja manja od 2300 strujanje je laminarno. Za vrednosti Reynoldsovog broja većeg od 2300 pa sve do vrednosti 4000 – 100000 strujanje je prelazno. Prelazno strujanje može da bude ili laminarno ili turbulentno (često bude čas laminarno čas turbulentno). Daljim povećavanjem vrednosti Reynoldsovog broja strujanje postaje turbulentno.

## 2.2.4 Profil brzina u poprečnom preseku pravih kružnih cevi

Profil brzina (raspored brzina) zavisi od režima strujanja.

Pri strujanju neviskoznog fluida kroz prave cevi kružnog poprečnog preseka tangencijalni naponi su jednaki nuli  $\tau = 0$ , a brzine u poprečnom preseku su konstantne, *slika 2.6*.

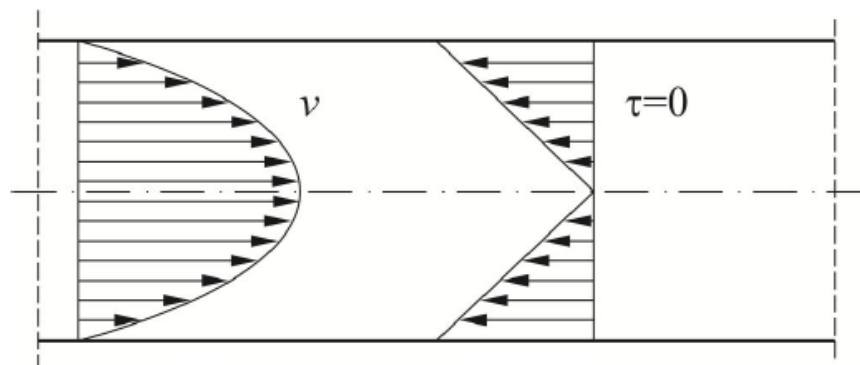


*Slika 2.6 Profil brzina i napona pri strujanju neviskoznog fluida*

Kod laminarnog režima strujanja profil brzine se menja po paraboličnom zakonu, *slika 2.7*. Na zidovima cevi brzine fluida su jednake nuli, dok je u osi cevi brzina strujanja maksimalna. Srednja brzina strujanja  $v_{sr}$  je jednaka polovini maksimalne brzine  $v_{max}$ :

$$v_{sr} = \frac{v_{max}}{2} \quad (2.28)$$

Promena tangencijalnog napona je linearna. Najveći naponi su na zidovima cevi, a najmanji ( $\tau = 0$ ) u osi cevi. Ovakav profil brzine objašnjava s malim vrednostima Reynoldsovih brojeva kod laminarnog režima strujanja fluida usled velikih sila trenja.



*Slika 2.7 Profil brzina i napona pri laminarnom režimu strujanja fluida*

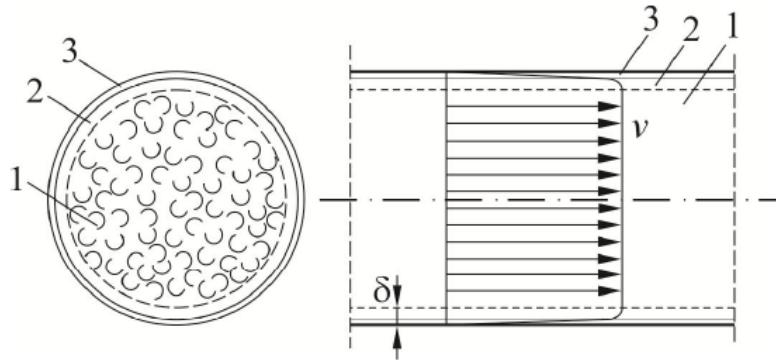
Na zidu cevi brzina strujanja je jednaka nuli. Fluidni delići se lepe za zid cevi i takođe imaju brzinu strujanja jednaku nuli. Sledeći sloj fluida prema osi cevi teži da povuče sloj fluida koje zalepljen za zid cevi. Sledeći sloj povlači prethodni i tako redom, pa se uticaj zida cevi prostire sve do ose cevi.

Kada je Reynoldsov broj manji od 2300 (laminaran režim strujanja), sile trenja dominiraju nad silama inercije, pa se uticaj zida cevi rasprostire do ose cevi. Povećavanjem Reynoldsovog broja (povećanjem



brzine) raste uticaj sile inercije nad uticajem sile trenja (turbulentan režim strujanja), tako da se uticaj zida cevi ne rasprostire do ose cevi. Kada bi Reynoldsov broj bio beskonačno velik, zid cevi više ne bi uticao na strujanje fluida (neviskoznan fluid).

Turbulentno strujanje može da se podeli u tri oblasti, *slika 2.8*: turbulentno jezgro (1), prelazna oblast (2) i laminaran sloj (3).



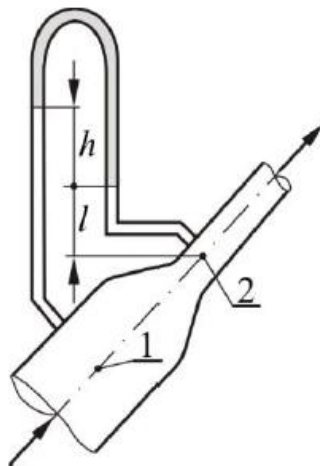
*Slika 2.8 Profil brzine pri turbulentnom režimu strujanja fluida*

U laminarnom sloju strujanje je laminarno, a brzina strujanja se linearno menja. U prelaznoj oblasti laminaran režim prelazi u turbulentan. Debljina graničnog sloja  $\delta$  je veoma mala, od desetih delova milimetra pa do nekoliko milimetara.

U bilo kojoj tački turbulentnog jezgra trenutne brzine se stalno menjaju. Najveća komponenta trenutne brzine u pravcu ose cevi. Postoje i fluktuirajuće komponente brzine u pravcu normalnom na pravac ose cevi. Ove fluktuirajuće komponente izazivaju mešanje fluidnih delića.

Profil brzina pri turbulentnom strujanju mnogo više podseća na profil brzine strujanja idealnog fluida od profila brzine pri laminarnom strujanju.

**Primer 2.1:** Voda struji bez gubitaka protokom  $Q$  kroz cev ( $d_1 > d_2$ ), *slika 2.9*. Razlika pritisaka na mestu 1 i 2 meri se obrnutom U cevi koja sadrži ulje čija je relativna gustina  $\rho_r < 1$ . Odrediti izraz za visinu  $h$  u funkciji zadatih veličina ( $Q, d_1, d_2, \rho_r, g$ ).



*Slika 2.9 Šematski prikaz cevi sa promenljivim poprečnim presekom*

Bernulijeva jednačina za preseke 1 i 2, kao i odgovarajuća jednačina kontinuiteta glase:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

$$v_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = v_2 \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

Iz prethodne dve jednačine sledi:

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right]$$

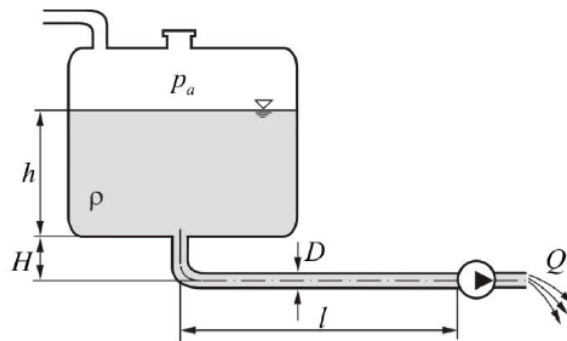
Razlika pritisaka izmerena preko U cevi glasi:

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + g \rho h(1 - \rho_r)$$

Kombinacijom poslednje dve jednačine dobija se traženi izraz za određivanje visine  $h$ :

$$h = \left( \frac{4Q}{d_2^2 \pi} \right)^2 \frac{1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^4}{2g(1 - \rho_r)}$$

**Primer 2.2:** Odrediti pritisak ulja na ulazu u pumpu sistema za ulje na avionu prikazanog na slici 2.10, ako avion leti na visini gde je atmosferski pritisak 10286 Pa. Dužina horizontalne deonice usisnog cevovoda je  $l = 2$  m, dužina vertikalne deonice iznosi  $H = 0,3$  m, a prečnik cevi je  $D = 18$  mm. Nivo ulja nalazi se na visini  $h = 0,7$  m iznad dna rezervoara. Ostvareni protok ulja, kinematske viskoznosti  $0,11 \text{ cm}^2/\text{s}$  i gustine  $900 \text{ kg/m}^3$ , je  $Q = 0,266 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . Lokalne otpore zanemariti.



Slika 2.10 Šematski prikaz rezervoara sa uljem

Iz jednačine kontinuiteta određuje se brzina strujanja ulja u cevi:

$$v = \frac{4Q}{D^2\pi} = 1,05 \text{ m/s}$$

Proverom Reynoldsovog broja:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = 1718 < 2300$$

zaključuje se da je strujanje na izlazu iz cevi laminarno. Koeficijent trenja za laminarno strujanje iznosi:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = 0,0373$$

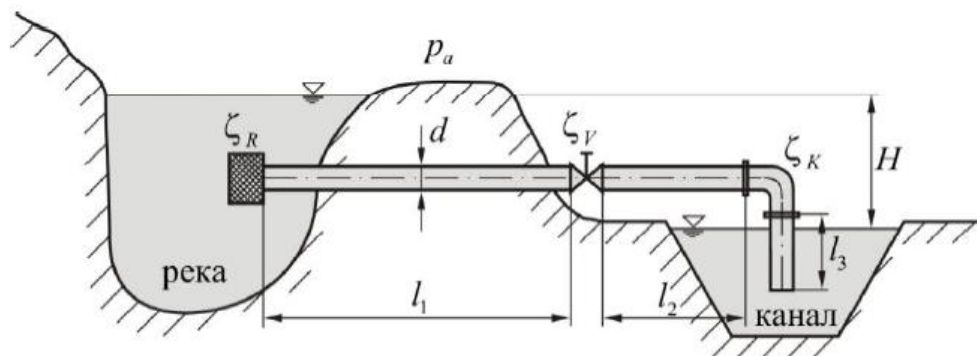
Iz Bernulijeve jednačine od tačke 1 do tačke 2:

$$\frac{p_a}{\rho} + g(h+H) = \frac{p_2}{\rho} + \alpha \frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{l+H}{D} \frac{v_2^2}{2}$$

određuje se pritisak ulja na ulazu u pumpu:

$$p_2 = p_a + \rho g(h+H) - \rho \frac{v_2^2}{2} \left( \alpha + \lambda \frac{l+H}{D} \right) = 15758,2 \text{ Pa}$$

**Primer 2.3:** Kroz cevovod prikazan na slici 2.11 prebacuje se voda temperature 15 °C iz reke u kanal, pri razlici nivoa  $H = 8$  m. Cevovod se sastoji od pravih deonica ukupne dužine  $L = L_1 + L_2 + L_3 = 1000$  m. Prečnik cevovoda je  $D = 800$  mm, apsolutna hrapavost cevovoda je  $e = 0,1$  mm, koeficijent otpora usisne rešetke je  $\zeta_R = 4$ , dok je koeficijent otpora kolena  $\zeta_K = 0,8$ . Odrediti koeficijent otpora ventila  $\zeta_V$  kad kroz sistema protiče  $Q = 55 \text{ m}^3/\text{min}$  vode.



Slika 2.11 Šematski prikaz cevovoda

Iz jednačine kontinuiteta:

$$Q = v \frac{D^2 \pi}{4}$$

određuje se brzina strujanja kroz cevovod:

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = 1,82 \text{ m/s}$$

Iz Mudijevo dijagrama za vrednosti relativne hrapavosti:

$$\delta = \frac{e}{D} = 1,25 \cdot 10^{-4}$$

i Reynoldsovog broja:

$$vD = 1,46 \text{ za vodu na } 15 \text{ }^\circ\text{C}$$

očitava se vrednost koeficijenta trenja  $\lambda = 0,0137$ .

Iz Bernulijeve jednačine od tačke 1 do tačke 2:

$$\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{p_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} \left( \lambda \frac{L}{D} + \zeta_R + \zeta_K + \zeta_V + 1 \right)$$

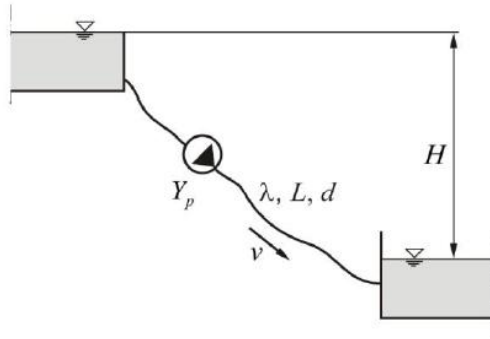
određuje se koeficijent otpora ventila:

$$\zeta_V = \frac{2gH}{v^2} - \left( \lambda \frac{L}{D} + \zeta_R + \zeta_K + 1 \right) = 24,46$$

**Primer 2.4:** U postrojenje za snabdevanje grada vodom za piće (*slika 2.12*) potrebno je ugraditi pumpu da bi se ostvario projektovani protok vode od  $Q = 80 \text{ l/s}$ . Lokalni gubici su 20 % gubitaka na trenje. Odrediti:

- snagu pumpe za projektovani protok, ako je prečnik cevovoda  $D = 200 \text{ mm}$ ;
- protok kroz instalaciju u slučaju kada nestane električne energije (gubitke u pumpi zanemariti);
- prečnik cevovoda da bi se projektovani protok ostvario bez pumpe.

Poznato je: dužina cevovoda je  $L = 6 \text{ km}$ , visinska razlika  $H = 100 \text{ m}$ , koeficijent trenja  $\lambda = 0,03$  i stepen korisnosti pumpe  $\eta_P = 70 \%$ .



Slika 2.12 Šematski prikaz vodovodnog sistema

a) Iz jednačine kontinuiteta:

$$Q = v \frac{D^2 \pi}{4}$$

određuje se brzina strujanja vode kroz cevovod:

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = 2,55 \text{ m/s}$$

Iz Bernulijeve jednačine od tačke 0 do tačke 1 dolazi se do napora pumpe:

$$Y_p = 1,2\lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} - gH = 2530,4 \text{ J/kg}$$

b) U slučaju nestanka električne energije snaga pumpe je  $P = 0$ , te se iz Bernulijeve jednačine od tačke 0 do tačke 1:

$$gH = 1,2\lambda \frac{L}{D} \frac{v_*^2}{2}$$

određuje se nova brzina strujanja vode kroz cevovod:

$$v_* = \sqrt{\frac{2gDH}{1,2\lambda L}} = 1,35 \text{ m/s}$$

Protok sada iznosi:

$$Q_* = v_* \frac{D^2 \pi}{4} = 42,3 \text{ l/s}$$

c) U ovom slučaju Bernulijeva jednačina od tačke 0 do tačke 1 i protok kroz cevovod glase:

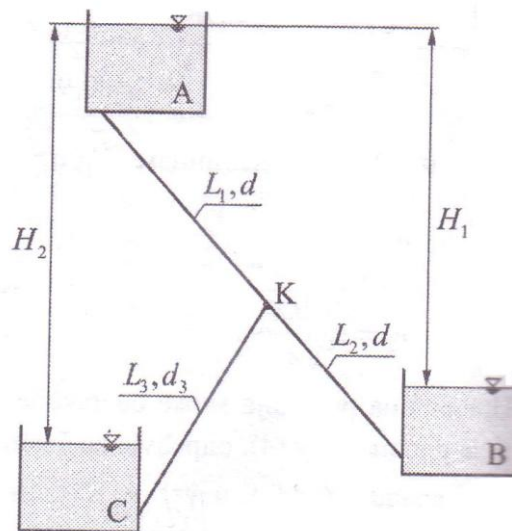
$$gH = 1,2\lambda \frac{L}{D_c} \frac{v_c^2}{2}$$

$$v_c = \frac{4Q}{D_c^2 \pi}$$

Kombinovanjem prethodne dve jednačine određuje se novi prečnik cevovoda:

$$D_c = \sqrt[5]{\frac{9,6\lambda L Q^2}{gH\pi^2}} = 258 \text{ mm}$$

**Primer 2.5:** Rezervoari A i B sa konstantnom razlikom  $H_1 = 12$  m, spojeni su glavnim vodom A-K dužine  $L_1 = 900$  m i potrošačkim vodom K-B dužine  $L_2 = 2700$  m, *slika 2.13*. Prečnici vodova iznose  $D = 0,6$  m. Potrošački vod K-C dužine  $L_3 = 1600$  m snabdeva rezervoar C vodom. Razlika nivoa vode u rezervoarima A i C je  $H_2 = 15$  m. Koeficijent trenja za sve cevi je isti i iznosi  $\lambda = 0,03$ , dok se lokalni gubici mogu zanemariti. Odrediti prečnik  $D_3$  potrošačkog voda K-C tako da jednaka količina vode dotiče u rezervoare B i C.



Slika 2.13 Šematski prikaz složenog sistema

Bernulijeve jednačine za odgovarajuće slobodne površi A-B, odnosno A-C glase:

$$gH_1 = \lambda \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2} + \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v_2^2}{2}$$

$$gH_2 = \lambda \frac{L_1}{D} \frac{v_1^2}{2} + \lambda \frac{L_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2}$$

Prema uslovu zadatka:

$$v_2 \frac{D^2 \pi}{4} = v_3 \frac{D_3^2 \pi}{4}$$

Odgovarajuća jednačina kontinuiteta za čvor K je:

$$v_1 \frac{D^2 \pi}{4} = v_2 \frac{D^2 \pi}{4} + v_3 \frac{D_3^2 \pi}{4}$$

Koristeći prethodne dve jednačine dobija se:

$$v_1 = 2v_2$$

Zamenom zavisnosti brzina u Bernulijevu jednačinu za vod A-B dobija se brzina strujanja u vodu K-B:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gDH_1}{\lambda(4L_1 + L_2)}} = 0,865 \text{ m/s}$$

Na osnovu dobijene vrednosti  $v_2$  izračunava se brzina  $v_1$  u vodu A-K:

$$v_1 = 2v_2 = 1,73 \text{ m/s}$$

Iz uslova zadatka definiše se brzina u potrošačkom vodu K-C:

$$v_3 = \left( \frac{D}{D_3} \right)^2 v_2$$

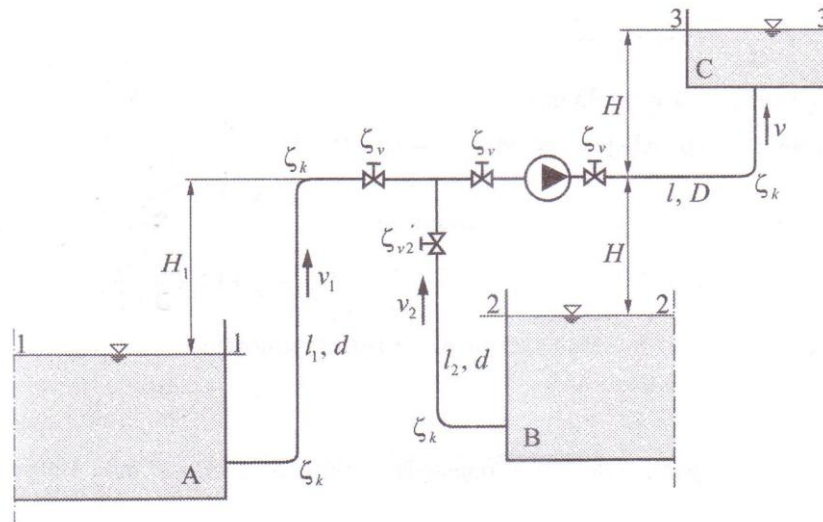
Uvrštavanjem ove zavisnosti u Bernulijevu jednačinu za vod A-C određuje se prečnik potrošačkog voda K-C:

$$D_3 = \sqrt[5]{\frac{\lambda L_3 v_2^2 D^5}{2gDH_2 - 4\lambda L_1 v_2^2}} = 493 \text{ mm}$$

**Primer 2.6:** Pumpa snage 3,5 kW i stepena korisnosti  $\eta_P = 0,7$  crpi vodu iz rezervoara A i B i potiskuje je u rezervoar C, *slika 2.14*. Odrediti:

- visinu  $H_I$ , ako je protok kroz pumpu 25 l/s;
- protok vode kroz pumpu ako je ventil 2 zatvoren, dok pumpa ostvaruje napor  $Y_P$  kao u zadatku pod a).

Ostali podaci su: visina  $H = 3$  m, dužine  $L = 45$  m,  $L_1 = 35$  m i  $L_2 = 20$  m, prečnici  $D = 150$  mm i  $d = 100$  mm, koeficijenti lokalnih otpora  $\zeta_V = 5$ ,  $\zeta_{V2} = 7$  i  $\zeta_K = 0,2$ , koeficijent trenja  $\lambda = 0,025$ .



Slika 2.14 Šematski prikaz složenog sistema

a) Napor pumpe je:

$$Y_p = \frac{\eta P}{\rho Q} = 98 \text{ J/kg}$$

brzina strujanja je:

$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} = 1,41 \text{ m/s}$$

Bernulijeve jednačine postavljene za preseke 1-3 i 2-3 su:

$$Y_p = g(H_1 + H) + \frac{v_1^2}{2} \left( 2\zeta_K + \zeta_V + \lambda \frac{L_1}{d} \right) + \left( 2\zeta_V + \zeta_K + 1 + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{v^2}{2}$$

$$Y_p = 2gH + \left( \zeta_{V2} + \zeta_K + \lambda \frac{L_2}{d} \right) \frac{v_2^2}{2} + \left( 2\zeta_V + \zeta_K + 1 + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{v^2}{2}$$

Iz Bernulijeve jednačine za deonicu 2-3 određuje se brzina strujanja  $v_2$ :

$$v_2 = 1,83 \text{ m/s}$$

Iz jednačine kontinuiteta:



$$v \frac{D^2 \pi}{4} = (v_1 + v_2) \frac{d^2 \pi}{4}$$

određuje se brzina  $v_1$ :

$$v_1 = 1,34 \text{ m/s}$$

Konačno, iz Bernulijeve jednačine za deonicu 1-3 određuje se tražena visina:

$$H_1 = 3,8 \text{ m}$$

b) Kada je ventil 2 zatvoren, napor pumpe je:

$$Y_p = g(H_1 + H) + \frac{v_{1*}^2}{2} \left( 2\zeta_K + \zeta_V + \lambda \frac{L_1}{d} \right) + \frac{v_{2*}^2}{2} \left( 2\zeta_V + \zeta_K + 1 + \lambda \frac{L}{D} \right)$$

Visina  $H_1$  se uzima iz tačke a). Jednačina kontinuiteta je:

$$v_* \frac{D^2 \pi}{4} = v_{1*} \frac{d^2 \pi}{4}$$

Kombinovanjem prethodne dve jednačine dobija se brzina strujanja  $v_*$ :

$$v_* = 0,83 \text{ m/s}$$

Protok kroz pumpu iznosi:

$$Q_* = v_* \frac{D^2 \pi}{4} = 14,7 \text{ l/s}$$

## Literatura:

1. Šašić M., (1990), *Transport fluida i čvrstih materijala cevima*, Naučna knjiga, Beograd
2. Bukurov Ž., (1987), *Mehanika fluida*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
3. Bukurov M., (2013), *Mehanika fluida, knjiga prva: osnove*, FTN Izdavaštvo, Novi Sad, ISBN 978-86-7892-545-0
4. Bukurov M., Todorović B., Bikić S., (2011), *Zbirka zadataka iz osnova mehanike fluida*, FTN Izdavaštvo, Novi Sad
5. Strelec V. i drugi, (2001), *Plinarski priručnik*, Energetika marketing, Zagreb
6. Cvijanović P., (1997), *Mehanika fluida*, MP Stylos, Novi Sad